concours externe de recrutement de professeurs agrégés

SESSION DE 1991

composition de mathématiques appliquées

Durée : 6 heures

ANALYSE NUMÉRIQUE

Introduction.

Nous dirons qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^s$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ satisfait à une propriété $\mathscr{P}$ « par morceaux » s'il existe un nombre fini d'hyperplans affines $H_1, \ldots, H_p$ de $\mathbb{R}^s$ tels que $\mathscr{P}$ soit vraie sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}^s \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{p} H_i \right]$.

Dans ce problème, on se propose de donner un procédé pour construire des fonctions polynomiales « par morceaux » sur $\mathbb{R}^s$ et possédant un certain degré de régularité sur $\mathbb{R}^s$.

Notations.

- $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{N}^*$) désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls (resp. positifs).
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- $C^m[a, b]$ est l'espace des fonctions numériques continûment dérivables sur $[a, b]$ jusqu'à l'ordre m.
- $C^m(\mathbb{R}^s)$ est l'espace des fonctions numériques continûment différentiables sur $\mathbb{R}^s$ jusqu'à l'ordre m.
- $L^2(a, b)$ est l'espace des (classes de) fonctions f telles que $\int_a^b |f(t)|^2 \, dt \in \mathbb{R}$.
- $\mathscr{D}(\mathbb{R}^s)$ est l'espace des fonctions numériques indéfiniment différentiables et à support compact dans $\mathbb{R}^s$.
- $\mathbb{R}^E$ est l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$.
- $\int_a^{\bullet} \phi(s)\,ds$ (resp. $\varphi(. + y)$) est l'application qui à tout $x \in [a, b]$ (resp. à tout $x \in \mathbb{R}^s$) associe $\int_a^x \phi(s)\,ds$ (resp. $\varphi(x + y)$).

I. Étant donné $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $m \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\mathscr{C}_m(a, b) = \left\{ f \in C^{m-1}[a, b] \mid f^{(j)}(a) = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant m - 1 \right.$$

$$\left. \text{et } \exists \phi \in L^2(a, b) \quad \forall t \in [a, b] \quad f^{(m-1)}(t) = \int_a^t \phi(s)\,ds \right\}.$$

On appellera dérivée généralisée d'ordre m de $f \in \mathscr{C}_m(a, b)$ et on notera $f^{(m)}$ l'élément $\tilde{\phi}$ de $L^2(a, b)$ tel que : $f^{(m-1)} = \int_a^{\bullet} \phi(s)\,ds$ où ϕ est une fonction appartenant à la classe $\tilde{\phi}$.

1. On considère le problème différentiel :

$$(\mathscr{E}_m^0) \quad \begin{cases} y^{(m)}(s) = \phi(s), & s \in [a, b] \text{ presque partout.} \\ y^{(j)}(a) = \alpha_j, & 0 \leqslant j \leqslant m - 1. \end{cases}$$

i. Montrer que si $\phi \in C^0[a, b]$, $(\mathscr{E}_m^0)$ admet une solution unique dans $C^m[a, b]$ qu'on explicitera en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral.

Tournez la page S.V.P.

ii. Déduire de *i.* que si $\tilde{\phi} \in L^2(a, b)$ et si ϕ est une fonction appartenant à la classe $\tilde{\phi}$, $(\mathscr{E}_m^0)$ admet une solution unique appartenant à $C^{m-1}[a, b]$.

2. On munit $\mathscr{C}_m(a, b)$ du produit scalaire :

$$(f, g) \to (f|g)_m = \int_a^b f^{(m)}(s) \cdot g^{(m)}(s)\, ds .$$

Montrer que $(\mathscr{C}_m(a, b), (.|.)_m)$ est un espace de Hilbert.

3. On pose : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$, $G_k(t, s) = \dfrac{(t-s)_+^k}{k!}$ où $(x)_+^k = \begin{cases} x^k & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On considère le problème différentiel :

$$(\mathscr{E}_m) \begin{cases} y^{(m)}(s) = G_{m-1}(t, s), & s \in \mathbb{R} \\ y^{(j)}(a) = 0, & 0 \leqslant j \leqslant m-1 \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R}$ est fixé.

i. Montrer que $(\mathscr{E}_m)$ a une solution unique que l'on notera $T_m(t, .)$.
Expliciter $T_m(t, .)$ au moyen de $G_{2m-1}(t, .)$ et de constantes $G_k(t, a)$.

ii. Montrer que : $\forall t \in [a, b]$, $\forall f \in \mathscr{C}_m(a, b)$, $f(t) = (T_m(t, .)\,|\,f)_m$.

En déduire que : $\forall t, s \in [a, b]$, $T_m(s, t) = \int_a^b G_{m-1}(s, \rho) \cdot G_{m-1}(t, \rho)\, d\rho$.

4. *i.* Représenter graphiquement $T_1(., t)$, $t \in \mathbb{R}$.

ii. On pose : $\forall g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\forall s, h \in \mathbb{R}, h \neq 0$, $D_h g(s) = \dfrac{g(s+h) - g(s)}{h}$

et $\forall t, s \in \mathbb{R}$, $S_{1,h}(t, s) = D_{h,1} D_{h,2} T_1(t, s)$

où $D_{h,1}$ (resp. $D_{h,2}$) s'applique au premier (resp. deuxième) argument de T_1.

Expliciter et représenter graphiquement $S_{1,h}(., t)$ pour $a < t - |h| < t < t + |h|$.

II. Soit $s, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant s$.

$\nu^1, \ldots, \nu^n$ étant n éléments distincts de $\mathbb{Z}^s \setminus \{0\}$, on pose : $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\gamma_k = \{\nu^1, \ldots, \nu^k\}$,
on note $\langle \gamma_k \rangle$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$ engendré par γ_k et

$$[\gamma_k] = \left\{ \sum_{j=1}^k \alpha_j \nu^j ;\ -\frac{1}{2} \leqslant \alpha_j < \frac{1}{2}, 1 \leqslant j \leqslant k \right\}.$$

On pose : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $Q_k = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^k$.

On désigne par $\mathscr{B}_{\gamma_k}$ la fonctionnelle linéaire sur $C^0(\mathbb{R}^s)$ telle que :

$$\forall \varphi \in C^0(\mathbb{R}^s), \quad \mathscr{B}_{\gamma_k}(\varphi) = \int_{Q_k} \varphi\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \nu^j \right) d\alpha_1 \ldots d\alpha_k .$$

A SUIVRE

On suppose que : $\langle \gamma_s \rangle = \mathbb{R}^s$.

On pose : $B_{\gamma_s}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{vol.}([\gamma_s])} & \text{si } x \in [\gamma_s] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

où vol. $([\gamma_s])$ désigne le volume de $[\gamma_s]$ dans $\mathbb{R}^s$.

1. Montrer que : $\forall \varphi \in C^0(\mathbb{R}^s)$, $\mathcal{B}_{\gamma_s}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^s} B_{\gamma_s}(x) \cdot \varphi(x)\, dx$.

2. On définit, par récurrence, B_{γ_n} à partir de B_{γ_s} en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^s, \quad B_{\gamma_{p+1}}(x) = \int_{-1/2}^{1/2} B_{\gamma_p}(x - \gamma \cdot \nu^{p+1})\, d\gamma, \quad s \leqslant p \leqslant n-1.$$

Montrer que : $\forall \varphi \in C^0(\mathbb{R}^s)$, $\mathcal{B}_{\gamma_n}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^s} B_{\gamma_n}(x)\, \varphi(x)\, dx$.

Expliciter B_{γ_n} en fonction de B_{γ_s}.

3. *i.* Montrer que B_{γ_n} est non négative presque partout.

ii. Montrer que le support de B_{γ_n} est compact.

iii. On suppose que $\nu^1, \ldots, \nu^n$ ont des coordonnées égales à 0 ou ± 1.
Dans le cas $s = 1$, $n = 2$, on choisit $\gamma_2 = \{1, -1\}$.
Expliciter $\mathcal{B}_{\gamma_2}$.
Dans le cas $s = 2$, $n = 3$, on choisit successivement :

$$\gamma_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \gamma_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Expliciter dans ces deux cas $\mathcal{B}_{\gamma_3}$.

iv. Montrer que B_{γ_n} est une fonction polynomiale « par morceaux » de degré inférieur ou égal à $(n - s)$.

4. On suppose $s \leqslant p \leqslant n - 1$.
On désigne par ∂_{ν^k} la dérivée dans la direction du vecteur ν^k.
Soit $\mathcal{D}(\mathbb{R}^s)$, l'espace vectoriel des fonctions à support compact, indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^s$.
on note $\partial_{\nu^j} \mathcal{B}_{\gamma_p}$ l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}^s) \to \mathbb{R} \\ \varphi \quad \to \displaystyle\int_{Q_p} \partial_{\nu^j} \varphi \left(\sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell\, \nu^\ell \right) d\alpha_1 \ldots d\alpha_p. \end{cases}$$

i. Montrer que pour $1 \leqslant j \leqslant p$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^s), \ \partial_{\nu^j} \mathcal{B}_{\gamma_p}(\varphi) = \mathcal{B}_{\gamma_p \setminus \{\nu^j\}} \left(\varphi \left(. + \frac{1}{2} \nu^j \right) \right) - \mathcal{B}_{\gamma_p \setminus \{\nu^j\}} \left(\varphi \left(. - \frac{1}{2} \nu^j \right) \right).$$

ii. Lorsque $\langle \gamma_p \setminus \{\nu^j\} \rangle = \mathbb{R}^s$, trouver une relation « par morceaux » entre $\partial_{\nu^j} B_{\gamma_p}$ et $B_{\gamma_p \setminus \{\nu^j\}}$.

Tournez la page S.V.P.

III. Soit $(e^1, \ldots, e^s)$ la base canonique de $\mathbb{R}^s$.
Notons ω l'isomorphisme de $\mathbb{R}^s$ tel que : $\omega e^j = v^j$, $1 \leqslant j \leqslant s$.
On note A la matrice associée à ω.

1. On pose : $B_0(\rho) = \begin{cases} 1 \text{ si } -\frac{1}{2} \leqslant \rho < \frac{1}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

et $\forall x = (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s$, $B_E(x) = \prod_{j=1}^{s} B_0(x_j)$.

Expliciter B_{γ_s} en fonction de $B_{\mathbb{E}}$, ω et $\det A$.

2. Une famille de fonctions $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{Z}^s}$ est dite **absolument libre** si pour toute famille de nombres $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}^s}$:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_j \varphi_j = 0 \Rightarrow a_j = 0 \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}^s.$$

i. Montrer que : $\sum_{j \in \mathbb{Z}} B_0(. - j) = 1$, que la famille de fonctions $(B_0(. - j))_{j \in \mathbb{Z}}$ est absolument libre et que la famille de fonctions $\left(B_0\left(\frac{1}{2}(. - j)\right)\right)_{j \in \mathbb{Z}}$ n'est pas absolument libre.

ii. Soit $\mathcal{W}_s = \{w_1, \ldots, w_s\}$ une base de $\mathbb{R}^s$ contenue dans $\mathcal{V}_n$.

j. Montrer que : $|\det \mathcal{W}_s| \geqslant 1$.

jj. On suppose que : $|\det \mathcal{W}_s| > 1$.

Montrer que : $\mathcal{U} = \left\{ \sum_{k=1}^{s} j_k w^k ; (j_1, \ldots, j_s) \in \mathbb{Z}^s \right\}$ est un sous-groupe propre de $\mathbb{Z}^s$.

Montrer que : $\sum_{j \in \mathcal{U}} B_{\mathcal{W}_s}(. - j - k)$ ne dépend pas de la classe de k dans $\mathbb{Z}^s/\mathcal{U}$.

Déduire de II.2. qu'il en est de même de $\sum_{j \in \mathcal{U}} B_{\mathcal{V}_n}(. - j - k)$ et que la famille $(B_{\mathcal{V}_n}(. - j))_{j \in \mathbb{Z}^s}$ n'est pas absolument libre.

jjj. On suppose que : $|\det \mathcal{W}_s| = 1$. Montrer que la famille $(B_{\mathcal{W}_s}(. - j))_{j \in \mathbb{Z}^s}$ est absolument libre.

iii. Soit P une matrice carrée d'ordre s à coefficients dans $\mathbb{Z}$ telle que $|\det P| = 1$.
Posons $\mathcal{V}'_n = \{Pv^1, \ldots, Pv^n\}$.
Montrer que les familles $(B_{\mathcal{V}_n}(. - j))_{j \in \mathbb{Z}^s}$ et $(B_{\mathcal{V}'_n}(. - j))_{j \in \mathbb{Z}^s}$ sont absolument libres simultanément.

3. On dit que $\mathcal{V}_n$ est **spécial dans** $\mathbb{Z}^s$ si $\langle \mathcal{V}_n \rangle = \mathbb{R}^s$ et si pour toute base $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^s$ extraite de $\mathcal{V}_n$ on a : $|\det \mathcal{W}| = 1$.
L'écriture : AL (s, n), dénote l'énoncé :
« Pour tout ensemble spécial $\mathcal{V}_n$ dans $\mathbb{Z}^s$, la famille $(B_{\mathcal{V}_n}(. - j))_{j \in \mathbb{Z}^s}$ est absolument libre ».

i. On suppose AL $(s, n-1)$ et AL $(s-1, n-1)$. On considère un ensemble spécial $\mathcal{V}_n$ dans $\mathbb{Z}^s$ tel que $e^1, \ldots, e^s \in \mathcal{V}_n$.
On suppose que, pour une famille de nombres $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}^s}$, on a :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_j B_{\mathcal{V}_n}(. - j) = 0.$$

j. Montrer que si $\langle \mathcal{V}_n \setminus \{e^1\} \rangle = \mathbb{R}^s$, alors $a_j - a_{j-e^1} = 0$ quel que soit $j \in \mathbb{Z}^s$.

A SUIVRE

jj. Montrer que si $\langle \mathcal{V}_n \setminus \{e^l\} \rangle \neq \mathbb{R}^s$, alors $\langle \mathcal{V}_n \setminus \{e^l\} \rangle = \{0\} \times \mathbb{R}^{s-1}$, et, là encore, $a_j - a_{j-e^l} = 0$ quel que soit $j \in \mathbb{Z}^s$. (C'est un peu plus délicat que pour *j.*, il faut utiliser la dualité avec $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^s)$.)

jjj. Montrer que la famille $(B_{\mathcal{V}_n}(. - j))_{j \in \mathbb{Z}^s}$ est absolument libre.

ii. Montrer AL (s, n).

IV. 1. On pose $\phi_0(. - j) = B_0\left(. - j - \frac{1}{2}\right)$, $j \in \mathbb{Z}$.

i. Montrer que la famille $(\phi_0(. - j))_{j \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale dans $L^2(\mathbb{R})$.

ii. Expliciter $\phi_0(. - j)$ comme combinaison linéaire d'éléments de la famille $(\phi_0(2. - k))_{k \in \mathbb{Z}}$. En déduire qu'il existe une famille $(E_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$(\pi_1) \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad E_{m+1} \supset E_m$$

$$(\pi_2) \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad f \in E_m \iff f(2.) \in E_{m+1}$$

$$(\pi_3) \quad \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} E_m = \{0\}, \quad \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} E_m} = L^2(\mathbb{R}).$$

Expliciter une base orthonormale de E_m.

iii. On pose : $\phi_{m,j} = 2^{m/2} \phi_0(2^m . - j)$

et : $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $P_m f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c^j_m(f) \phi_{m,j}$

où $c^j_m(f) = \int_{\mathbb{R}} f(\zeta) \phi_{m,j}(\zeta) \, d\zeta$.

Montrer que :

$\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $P_{m+1} f - P_m f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} d^j_m(f) \psi_{m,j}$ où $\psi_{m,j} = 2^{m/2} \psi_0(2^m . - j)$.

Expliciter ψ_0.

2. On suppose que la famille $\left(B_{\mathcal{V}_n}(. - j)\right)_{j \in \mathbb{Z}^s}$ est libre. Étendre les résultats du IV.1.

FIN

concours externe de recrutement de professeurs agrégés

SESSION DE 1991

composition de mathématiques appliquées

Durée : 6 heures

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

I. Préambule.

Le problème proposé consiste en l'étude du comportement d'un système gyroscopique monté sur avions ou bateaux, dans les conditions du mouvement extérieur imposé. Ce système est connu sous le nom d'« horizon artificiel », ou « horizon gyroscopique », ou « gyroscope d'assiette ». Il est destiné à fournir une référence verticale quels que soient la position et le mouvement de l'engin-support (l'avion ou le bateau).

La conservation du moment cinétique est à l'origine du principe de fonctionnement de l'horizon gyroscopique : comme n'importe quelle toupie, il garde son axe de rotation immobile par rapport au repère galiléen de référence tant qu'il n'y a pas de forces ou de moments dynamiques appliqués de l'extérieur. Dans les conditions réelles, on ne peut pas soustraire le gyroscope à l'action de tels efforts ; c'est pourquoi une étude de stabilité s'impose, permettant la détermination précise des conditions dans lesquelles le fonctionnement de l'horizon artificiel peut être assuré.

Le problème se divise en trois parties : dans la première, on étudie la mise en équations du système par l'application des théorèmes généraux de la mécanique et par la méthode de Lagrange, en repère galiléen. Dans la seconde, on généralise les équations au cas où le repère de référence (l'avion ou le bateau) n'est plus galiléen, et l'on étudiera l'incidence des forces d'inertie sur le mouvement du gyroscope. Dans la troisième partie, on étudiera la stabilité du système soumis à des vibrations provoquées par le moteur de l'engin-porteur, en utilisant la linéarisation autour de la position d'équilibre. Une application numérique à la fin du problème rendra l'étude complète.

II. Description du système et des variables dynamiques.

L'appareil étudié, noté Σ, est un système gyroscopique monté sur le support S. Le repère solidaire avec ce support est noté R_S $(O ; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Σ est composé de trois solides : une armature externe E, une armature interne I et le rotor R. Le point O est fixe dans les trois solides.

L'armature externe E est articulée sur le support S par une liaison pivot d'axe $(O ; \vec{w})$. Le centre d'inertie de E est situé sur l'axe $(O ; \vec{w})$; on désigne par L le moment d'inertie de E par rapport à l'axe $(O ; \vec{w})$. Le repère R_E $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{w})$ est lié à E.

L'armature interne I est articulée sur E par une liaison pivot d'axe $(O ; \vec{i})$. O est le centre d'inertie de I ; l'opérateur d'inertie en O de I (sa matrice d'inertie) est à symétrie sphérique, c'est-à-dire que si l'on désigne par K le moment d'inertie de I par rapport à une droite passant par O, la matrice d'inertie de I en O par rapport aux axes $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{w})$ est :

$$\begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{w})} = \mathbb{J}(O, I).$$

On pose $\vec{h} = \vec{j} \cos\theta + \vec{w} \sin\theta$ et $\vec{z} = -\vec{j} \sin\theta + \vec{w} \cos\theta$.

Le repère $(O ; \vec{i}, \vec{h}, \vec{z})$ est lié à I.

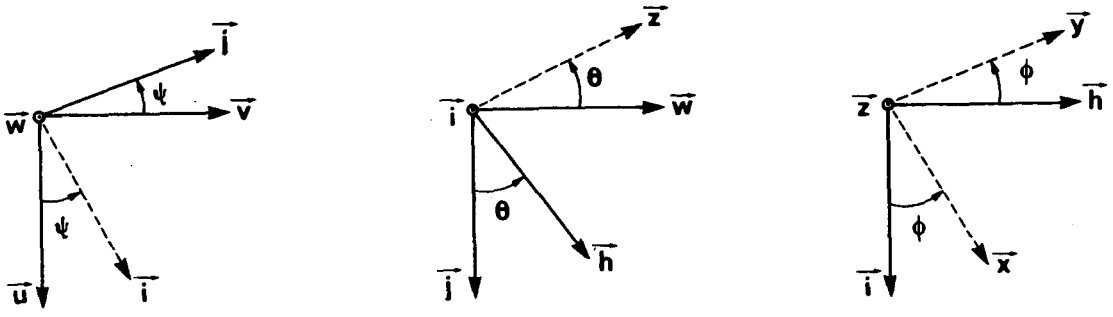
La matrice d'inertie $\mathbb{J}(O, I)$ reste la même que ci-dessus.

A SUIVRE

Le rotor R est articulé sur I par une liaison pivot d'axe $(O; \vec{z})$. Le repère $R_R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à R. Les caractéristiques d'inertie de R sont : sa masse M, son centre d'inertie G situé sur la droite $(O; \vec{z})$ et repéré par $\overrightarrow{OG} = a\vec{z}$, a étant une constante strictement positive ; la matrice d'inertie en O par rapport aux axes $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est :

$$\mathbb{J}(O, R) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Le système possède trois degrés de liberté : la rotation de R par rapport à I, définie par l'angle ϕ mesuré positivement autour de $\vec{z}$, $\phi = (\vec{i}, \vec{x}) = (\vec{h}, \vec{y})$; la rotation de I par rapport à E, définie par l'angle θ mesuré positivement autour de $\vec{i}$, $\theta = (\vec{j}, \vec{h}) = (\vec{w}, \vec{z})$, et la rotation de E par rapport à S, définie par l'angle ψ mesuré positivement autour de $\vec{w}$, $\psi = (\vec{u}, \vec{l}) = (\vec{v}, \vec{j})$. (Voir schéma ci-dessous.)



La rotation propre de R est maintenue uniforme par un petit moteur électrique m de masse négligeable, monté entre I et R. Ce moteur impose le mouvement du rotor, dont la vitesse angulaire est maintenue constante :

$$\boxed{(\vec{i}, \vec{x}) = (\vec{h}, \vec{y}) = \phi = \omega t}; \quad \text{avec} \quad \omega = \text{Cte}.$$

Les actions mécaniques de m sur R sont représentables par le torseur de résultante nulle et de moment $N\vec{z}$:

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ N\vec{z} \end{matrix} \right\}$$ [$N\vec{z}$ étant le moment des forces en G, appliqué à R].

Toutes les liaisons pivot sont supposées parfaites.

III. Étude du mouvement, mise en équations dans le cas du repère R_S galiléen.

Dans cette partie, l'engin support du gyroscope est immobile par rapport à la terre ; le repère $R_S(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est donc considéré galiléen. Le support S est lié rigidement à l'engin dans une position telle que l'axe $(O; \vec{u})$ soit *vertical descendant* ; l'accélération de la pesanteur est donc, dans cette partie du problème, $\vec{g} = g\vec{u}$, $g = 9{,}81$ m/s^2.

1. À l'aide du théorème du moment cinétique appliqué consécutivement :

   a. au rotor R projection sur l'axe $\vec{z}$;

   b. au système Σ projeté sur l'axe $\vec{w}$;

   c. à l'ensemble I ∪ R projeté sur l'axe $\vec{l}$,

   trouver deux équations de mouvement ainsi que la troisième équation définissant $N(t)$. Justifier le choix des projections par les propriétés des liaisons impliquées.

2. En définissant un champ virtuel des vitesses compatible avec les liaisons géométriques imposées mais non compatible avec la condition $\frac{d\phi}{dt} = \omega$, retrouver les mêmes équations par la méthode de Lagrange.

3. Quelles sont les positions de l'axe $(O; \vec{z})$ du rotor pour lesquelles cet axe reste fixe dans le repère $R_S(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$? À quelle position du rotor correspond $\psi = -\frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$?

Tournez la page S.V.P.

4. En posant $\psi = -\frac{\pi}{2} + \alpha$ *et* $\theta = \frac{\pi}{2} + \beta$, linéariser les deux équations de mouvement en ne gardant que les termes linéaires en α, β et leurs dérivées.

   Écrire l'équation caractéristique du système et donner les conditions de stabilité de la position $\psi = -\frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Définir la valeur minimale de ω (en fonction des caractéristiques mécaniques du système, à savoir les coefficients C, L, K, A, M, *a* et *g*) assurant la stabilité.

IV. L'engin est en train d'effectuer un virage. On modélise la situation en admettant que le repère $R_S(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est plus galiléen. Soit $R_T(T; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère galiléen lié à la Terre, $\vec{z}_0$ étant vecteur *vertical ascendant*. L'accélération de la pesanteur est maintenant $\vec{g} = -g\vec{z}_0$. Le mouvement de R_S par rapport à R_T est défini de la manière suivante :

$$\overrightarrow{TO} = d(\vec{x}_0 \cos \Omega t + \vec{y}_0 \sin \Omega t), \qquad (\Omega \text{ et } d \text{ constantes})$$

avec d le rayon de la trajectoire circulaire sur laquelle s'effectue le virage, et le point fixe T le centre de la trajectoire circulaire ; Ω la vitesse angulaire correspondante, égale à $\frac{V}{d}$, $V = \left\| \frac{d}{dt}(\overrightarrow{TO}) \right\|$, vitesse linéaire de l'engin. On a aussi :

$$\vec{\Omega}(R_S/R_T) = \Omega \vec{z}_0 .$$

La position des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ du repère R_S est définie comme suit : le vecteur unitaire $\vec{v}$ est aligné sur la vitesse instantanée de l'engin, le vecteur $\vec{u}$ est aligné sur l'accélération résultante instantanée qui est la somme de l'accélération de la gravitation $\vec{g}$ et de l'accélération centrifuge $-\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{TO})$; finalement, $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Dans ce qui suit, utiliser la notation :

$$\frac{g}{\sqrt{g^2 + V^2\Omega^2}} = \cos \alpha , \qquad \frac{V\Omega}{\sqrt{g^2 + V^2\Omega^2}} = \sin \alpha \quad et \quad V = \Omega d .$$

Considérer α comme petit ; Ω^2 à négliger, mais $V = \Omega d$ non négligeable.

1. Trouver, par la méthode de votre choix, les équations de mouvement modifiées *en ne gardant que les termes linéaires en* Ω supposée petite.

2. Trouver les nouvelles solutions stationnaires ($\dot{\phi} = \omega = Cte$, $\dot{\psi} = 0$, $\dot{\theta} = 0$). La solution précédente $\vec{z} = \pm \vec{z}_0$ peut-elle être maintenue ?

V. Dans cette partie, le mouvement de l'engin est à nouveau *rectiligne par rapport à la Terre* ; le repère R_S est en translation rectiligne par rapport au repère R_T considéré *comme étant galiléen*. L'axe $(T; \vec{u})$ est vertical descendant. La translation de S par rapport à la Terre est définie par :

$$\boxed{\overrightarrow{TO} = f(t)\,\vec{w}}$$

$f(t)$ étant une fonction connue, deux fois continûment dérivable.

1. Écrire les deux équations de mouvement de Σ.

2. L'engin suit un mouvement rectiligne uniforme par rapport à la Terre, mais le support S est soumis à des vibrations connues, dues au fonctionnement du moteur de propulsion de l'engin. On modélise la situation en posant :

$$f(t) = Vt + \varepsilon \sin \Omega t ,$$

V, ε, Ω étant des constantes positives connues, ε étant très petit.

Écrire les équations du mouvement modifiées par la présence de la force extérieure $f(t)$.

A SUIVRE

3. Étudier les petits mouvements de l'axe $(O;\vec{z})$ du rotor autour de la position d'équilibre du système non perturbé :

$$\psi = -\frac{\pi}{2}, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Donner les valeurs de Ω qui risquent d'entraîner une résonance dangereuse, déstabilisant le gyroscope.

VI. Application numérique.

On donne les valeurs numériques suivantes :

$M = 200\,g$;
$a = 4\,cm$;
$A = 400\,g \cdot cm^2$;
$C = 900\,g \cdot cm^2$;
$K = 1\,600\,g \cdot cm^2$;
$L = 2\,000\,g \cdot cm^2$.

Trouver la valeur ω_{min} à partir de laquelle la stabilité est assurée dans la partie III du problème.

Dans la partie IV, on posera : $V = 700$ km/h, $\Omega = \frac{2\pi}{600}$ rad/s.

L'approximation linéaire est-elle justifiée ? Évaluez dans ce cas $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$.

Dans la partie V, on garde les mêmes valeurs des constantes M, a, A, C, K et L, et on impose $\Omega = 2\pi \cdot 20$ rad/s. Trouver les vitesses angulaires Ω_1, Ω_2 susceptibles de provoquer une résonance dangereuse pouvant déstabiliser le gyroscope.

FIN

concours externe de recrutement de professeurs agrégés

SESSION DE 1991

composition de mathématiques appliquées

Durée : 6 heures

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Le but du problème est de mettre en évidence certains comportements asymptotiques de la suite des images d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ par une succession de déplacements au hasard indépendants.

Avertissement.

A.1., A.2., A.3. *utilisent des notations et des définitions spécifiques et peuvent être abordées avant la lecture du préambule.* **B.1., B.3., C** *sont indépendantes de* **A.** **C** *n'intervient pas dans la résolution des questions ultérieures.*

PRÉAMBULE

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est identifié à sa représentation par des matrices colonnes dans la base canonique (e_1, e_2), il est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire et la norme étant notés $\langle \cdot , \cdot \rangle$ et $\| . \|$.

On appelle $SO(2)$ le groupe multiplicatif des matrices de rotations de $\mathbb{R}^2$ et e son élément neutre, matrice identité de $\mathbb{R}^2$. Si u, $v \in SO(2)$ et $y \in \mathbb{R}^2$, uv, uy, u^* désignent respectivement les produits matriciels de u par v, de u par y et la transposée de u. La bijection de $]0, 1[$ sur $SO(2)$ qui, à $s \in]0, 1[$, associe la rotation d'angle $2\pi s$ est notée ρ et l'on pose $\theta = \rho^{-1}$.

G est le groupe obtenu en munissant $SO(2) \times \mathbb{R}^2$ du produit :

$$(u, y)\,(v, z) = (uv, y + uz),$$

il s'identifie au groupe des déplacements de $\mathbb{R}^2$ par la formule :

$$x \in \mathbb{R}^2, \qquad (u, y) \in G, \qquad (u, y)x = ux + y.$$

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace de probabilité et E l'opérateur d'espérance associé.

L'expression : variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ à valeurs dans H, sera abrégée en : v.a. de H.

Si M_d est l'espace des matrices à coefficients réels à 2 lignes et d colonnes, $d = 1$ ou 2, une v.a. de M_d est une fonction Z de Ω dans M_d dont les applications composantes $Z_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, $1 \leqslant j \leqslant d$, sont des v.a. réelles. Z est dite intégrable (resp. de carré intégrable) si les v.a. $Z_{i,j}$ sont intégrables (resp. de carrés intégrables). Lorsque Z est intégrable, $E[Z]$ est l'élément de M_d dont les coefficients sont $E[Z_{i,j}]$. On remarquera que, si Y est une v.a. intégrable de $\mathbb{R}^2$ et si $x \in \mathbb{R}^2$,

$$E[\langle x, Y\rangle] = \langle x, E[Y]\rangle.$$

Une v.a. de G est la donnée d'un couple (U, Y) où Y est une v.a. de $\mathbb{R}^2$ et U une v.a. de $SO(2)$, c'est-à-dire une v.a. de M_2 à valeurs dans $SO(2)$.

Si X_1, X_2 sont des v.a. de G, U_1, U_2 des v.a. de $SO(2)$ et Y une v.a. de $\mathbb{R}^2$, les v.a. X_1X_2 de G, U_1^* et U_1U_2 de $SO(2)$, X_1Y et U_1Y de $\mathbb{R}^2$ sont définies par :

$$X_1X_2(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega), \qquad U_1^*(\omega) = U_1(\omega)^*, \qquad U_1U_2(\omega) = U_1(\omega)U_2(\omega),$$
$$X_1Y(\omega) = X_1(\omega)Y(\omega), \qquad U_1Y(\omega) = U_1(\omega)Y(\omega).$$

Dans ce qui suit, $X_n = (U_n, Y_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, désignent les termes d'une suite de v.a. de G, *indépendantes et de même loi*; l'objet de l'étude est la suite $(L_nx)_{n \geqslant 0}$ où $x \in \mathbb{R}^2$ et $(L_n)_{n \geqslant 0}$ est la suite de v.a. de G définie par :

$$L_0 = (e, 0) \quad \text{et,} \quad \text{pour } n \geqslant 1, \qquad L_n = X_nL_{n-1}.$$

A SUIVRE

La seconde composante de L_n, soit S_n, est donnée par les formules :

$$S_0 = 0 \quad \text{et,} \quad \text{pour } n \geqslant 1, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} U_{n,k+1} Y_k$$

où $U_{n,n+1} = e$ et, pour l, $1 \leqslant l \leqslant n$, $U_{n,l} = U_{n,l+1} U_l$, soit encore :

$$S_n = Y_n + U_n Y_{n-1} + \ldots + U_n \ldots U_2 Y_1 .$$

Il est utile, pour l'étude de $(S_n)_{n \geqslant 0}$, d'introduire la suite $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ de v.a. de $\mathbb{R}^2$, seconde composante de la suite $(R_n)_{n \geqslant 0}$ de v.a. de G définie par :

$$R_0 = (e, 0) \quad \text{et,} \quad \text{pour } n \geqslant 1, \quad R_n = R_{n-1} X_n$$

dont les termes se calculent par les formules :

$$Z_0 = 0 \quad \text{et,} \quad \text{pour } n \geqslant 1, \quad Z_n = \sum_{k=1}^{n} \check{U}_{k-1} Y_k$$

où $\check{U}_0 = e$ et, pour l, $1 \leqslant l$, $\check{U}_l = \check{U}_{l-1} U_l$, soit encore :

$$Z_n = Y_1 + U_1 Y_2 + \ldots + U_1 \ldots U_{n-1} Y_n .$$

La résolution de certaines questions fera intervenir la propriété d'adaptation, définie dans le préliminaire **A**, de la probabilité γ sur $[0, 1[$, loi de la v.a. $\theta(U_1)$. *Il sera toujours supposé que* $\gamma(\{0\}) < 1$ *et que* $P([Y_1 = 0]) < 1$.

On rappelle la convention $\inf \emptyset = +\infty$ et les notations : 1_A pour la fonction indicatrice de l'ensemble A, $[X \in B]$ pour l'image réciproque de B par X, lim p.s. pour la limite presque sûre.

A

Ce préliminaire nécessite de nouvelles définitions et notations.

On rappelle $\mathbb{T}$ le groupe obtenu en munissant $[0, 1[$ de l'addition modulo 1, notée $\oplus$; pour $r \in \mathbb{N}^*$, H_r est le sous-groupe de $\mathbb{T}$ engendré par $\frac{1}{r}$.

$\mathscr{C}$ désigne l'espace vectoriel des restrictions à $\mathbb{T}$ des fonctions continues de période 1 sur $\mathbb{R}$ et J la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{T}$ des éléments de $\mathscr{C}$.

$\mathscr{T}$ est la tribu trace sur $\mathbb{T}$ de la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ et m la restriction à $\mathscr{T}$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des probabilités sur $(\mathbb{T}, \mathscr{T})$ est noté $\mathscr{P}$.

Si $\mu, \nu \in \mathscr{P}$, leur produit de convolution est $\mu \star \nu \in \mathscr{P}$, défini par :

$$A \in \mathscr{T}, \ \mu \star \nu(A) = \int 1_A(s \oplus t)\, d\mu(s)\, d\nu(t);$$

pour $l \in \mathbb{N}^*$, μ^{*l} désigne le produit de convolution de l termes égaux à μ ; l'on conviendra que μ^{*0} est la probabilité portée par $\{0\}$.

Les coefficients de Fourier de $\mu \in \mathscr{P}$ sont les complexes $\hat{\mu}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, définis par :

$$\hat{\mu}(k) = \int e^{2i\pi ks}\, d\mu(s).$$

On dira que $\mu \in \mathscr{P}$ est **adaptée** si, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\mu(H_r) < 1$.

1. Soit $\mu \in \mathscr{P}$ et $(\mu_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de $\mathscr{P}$, prouver l'équivalence des assertions suivantes :
   a. pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\lim_n \hat{\mu}_n(k) = \hat{\mu}(k)$;
   b. pour tout $f \in \mathscr{C}$, $\lim_n \int f d\mu_n = \int f d\mu$.

2. Montrer que pour que $\mu \in \mathscr{P}$ soit adaptée il faut et il suffit que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$,
$$\int (1 - \cos(2\pi ks))\, d\mu(s) > 0.$$

3. On pose : $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \mu^{*l}$,
montrer que, si μ est adaptée, on a, pour tout $f \in \mathscr{C}$, $\lim_n \int f d\mu_n = \int f dm$.

Tournez la page S.V.P.

4. Soit $(\Theta_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. de $\mathbb{T}$ indépendantes de loi μ adaptée et Q une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ de matrice $[q_{i,j}]_{i,j=1,2}$, montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, la suite de terme général :

$$\overline{Q}_n(x, y) = \frac{1}{n}\{Q(x, y) + \sum_{k=1}^{n-1} E[Q(\rho(\Theta_1 + \ldots + \Theta_k)x, \rho(\Theta_1 + \ldots + \Theta_k)y)]\}, \quad n \geqslant 2,$$

converge et identifier sa limite $\overline{Q}(x, y)$.

B

1. Soit, pour $n \geqslant 1$, h_n une application mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, on note $\tilde{Y}_n = h_n(Y_n)$ et $\tilde{X}_n = (U_n, \tilde{Y}_n)$.

   a. Montrer que, si f est une fonction numérique mesurable définie sur G^{n+1} telle que :

$$E[|f(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{n+1})|] < +\infty$$

   et si $\mathcal{F}_n$ est la tribu engendrée par $(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)$, on a :

$$E[f(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n, \tilde{X}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = \varphi(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n) \text{ p.s.},$$

   où φ est définie pour $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ tel que $E[|f(g_1, \ldots, g_n, \tilde{X}_{n+1})|] < +\infty$ par :

$$\varphi(g_1, \ldots, g_n) = E[f(g_1, \ldots, g_n, \tilde{X}_{n+1})].$$

   On suppose jusqu'à la fin de cette question que $\tilde{Y}_n$ est de carré intégrable et que $E[\tilde{Y}_n] = 0$.

   b. Montrer que, pour $i = 1, 2$ et $n \geqslant 1$, $E[\langle \check{U}_{n-1}\tilde{Y}_n, e_i\rangle] = 0$.

   c. On pose, pour $p, q \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant q$ et $i, j = 1, 2$,

$$\tilde{C}(p, q, i, j) = E[\langle \check{U}_{p-1}\tilde{Y}_p, e_i\rangle \langle \check{U}_{q-1}\tilde{Y}_q, e_j\rangle],$$

   prouver que, si $p \neq q$, $\tilde{C}(p, q, i, j) = 0$, tandis que :

$$\tilde{C}(p, q, i, j) = E[Q_p(\check{U}^*_{p-1}e_i, \check{U}^*_{p-1}e_j)],$$

   où, pour $x, y \in \mathbb{R}^2$,
$$Q_p(x, y) = E[\langle x, \tilde{Y}_p\rangle\langle y, \tilde{Y}_p\rangle].$$

2. On suppose Y_1 de carré intégrable, $E[Y_1] = 0$ et γ adaptée, montrer que la matrice de covariance de $\overline{C}_n$ de $\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n$ converge vers $\sigma^2 e$, où $\sigma^2 = \frac{1}{2}E[\|Y_1\|^2]$.

3. On suppose Y_1 intégrable mais non plus centrée ; pour $a \in \mathbb{R}^2$, on note τ_a la translation de $\mathbb{R}^2$ définie par $\tau_a(x) = x + a$ et l'on pose :

$$X^\circ_n = \tau_a X_n \tau_{-a}, \quad X^\circ_n = (U^\circ_n, Y^\circ_n).$$

   a. Montrer qu'il existe a_0 tel que $E[Y^\circ_n] = 0$.

   b. $(Z^\circ_n)_{n\geqslant 0}$ étant définie à partir de $(X^\circ_n)_{n\geqslant 1}$ comme $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ à partir de $(X_n)_{n\geqslant 1}$, quelle relation existe-t-il entre Z_n et Z°_n, $n \geqslant 0$?

C

On rappelle que, si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\mathbb{R}^2$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}u_n$ converge, on a :

$$\lim_n \frac{1}{n}(u^1 + \ldots + u_n) = 0.$$

On suppose Y_1 intégrable et, sauf dans la dernière question, $E[Y_1] = 0$.

On pose :
$$Y'_n = Y_n 1_{\{\|Y_n\| \leqslant n\}}, \quad \tilde{Y}_n = Y'_n - E[Y'_n]$$

et, pour $p, q \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < q$,
$$\tilde{Z}_{p,p} = 0, \quad \tilde{Z}_{p,q} = \sum_{n=p+1}^{q}\frac{1}{n}\check{U}_{n-1}\tilde{Y}_n.$$

1. *a.* Prouver que, si $\sigma^2_{p,q} = E[\|\tilde{Z}_{p,q}\|^2]$, on a, pour $1 \leqslant p < q$, $\sigma^2_{p,q} = \sum_{n=p+1}^{q}\frac{1}{n^2}E[\|\tilde{Y}_n\|^2]$.

A SUIVRE

b. Utiliser la partition de Ω par les événements : $[Y_1 = 0]$, $[k-1 < \|Y_1\| \leqslant k]$, $k \geqslant 1$,

et l'inégalité $\sum_{n \geqslant k} \frac{1}{n^2} < \frac{2}{k}$, $k \geqslant 1$, pour établir que : $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} E[\|Y_1\|^2 1_{[\|Y_1\| \leqslant n]}] < +\infty$.

c. On pose, pour $p \geqslant 1$, $\sigma_p^2 = \sup\{\sigma_{p,q}^2 : q \geqslant p\}$, montrer que $\sigma_p^2 < +\infty$ et que $(\sigma_p^2)_{p \geqslant 1}$ tend vers 0 en décroissant.

2. *a.* Soient ε, p et q tels que $\varepsilon > 0$, $\sigma_p^2 < \varepsilon^2$ et $q > p$, si :

$$T = \inf\{k : p < k \leqslant q, \|\tilde{Z}_{p,k}\| > 2\varepsilon\},$$

montrer que : $$P([\|\tilde{Z}_{p,q}\| \geqslant \varepsilon]) \geqslant \sum_{k=p+1}^{q} P([T = k])\, P([\|\tilde{Z}_{k,q}\| < \varepsilon])$$

et en déduire que : $$P([\max\{\|\tilde{Z}_{p,k}\| : p \leqslant k \leqslant q\} > 2\varepsilon]) \leqslant \frac{\sigma_p^2}{\varepsilon^2 - \sigma_p^2}.$$

b. Montrer que la série : $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \check{U}_{n-1} \tilde{Y}_n$ converge p.s.

3. *a.* Montrer que :

$$\lim_n \text{p.s.} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \check{U}_{k-1} Y'_k = 0.$$

b. Montrer que $P(\liminf_n [Y'_n = Y_n]) = 1$ et en déduire que $\lim_n \text{p.s.} \frac{1}{n} Z_n = 0$.

4. On ne suppose plus $E[Y_1] = 0$, déterminer la limite p.s. de la suite $\left(\frac{1}{n} Z_n\right)_{n \geqslant 1}$ puis, en considérant $(U_{n,1})^* L_n x$, celle de $\left(\frac{1}{n} L_n x\right)_{n \geqslant 1}$, $x \in \mathbb{R}^2$.

D

On suppose γ adaptée, Y_1 de carré intégrable et, sauf dans la dernière question, $E[Y_1] = 0$.

La fonction caractéristique Φ_n de $\frac{1}{\sqrt{n}} Z_n$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\Phi_n(x) = E\left[\exp\left(i\left\langle x, \frac{1}{\sqrt{n}} Z_n\right\rangle\right)\right];$$

$\overline{C}_k$ et σ^2 étant définis comme en **B.2.**, on désigne par $\overline{Q}_k$ la forme quadratique de matrice $\overline{C}_k$ et l'on pose :

$$\rho_k = \sup\{\|(\overline{C}_k - \sigma^2 e)\, x\| : x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1\}.$$

Jusqu'en 5.*a.*, k est un entier strictement positif fixé.

1. *a.* Montrer que : $\Phi_k(x) = 1 - \frac{1}{2} \overline{Q}_k(x) + \|x\|^2 \varepsilon_k^1(x)$ où $\lim_{x \to 0} \varepsilon_k^1(x) = 0$.

Tournez la page S.V.P.

b. Soient $(l_m)_{m \geq 1}$ une suite de $\mathbb{N}$ telle que $\lim_m l_m = +\infty$ et $(\lambda_m)_{m \geq 1}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_m \lambda_m^2 l_m = 1$, déterminer la limite de la suite $([\Phi_k(\lambda_m x)]^{l_m})_{m \geq 1}$.

2. Prouver que, pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Phi_{p+q}(\sqrt{p+q}\, x) = \mathrm{E}[\exp(i\langle x, Z_p\rangle)\, \Phi_q(\sqrt{q}\, \check{U}_p^* x)].$$

3. *a.* Montrer qu'il existe une fonction ε_k définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\lim_{x \to 0} \varepsilon_k(x) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\sup\{|\Phi_k(x) - \Phi_k(vx)| : v \in \mathrm{SO}(2)\} \leq (\rho_k + \varepsilon_k(x))\|x\|^2.$$

b. Établir (par récurrence sur n) l'inégalité, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et $n \geq 1$,

$$|\Phi_{kn}(\sqrt{n}\, x) - (\Phi_k(x))^n| \leq (n-1)(\rho_k + \varepsilon_k(x))\|x\|^2.$$

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\lim_n \sup\left\{\left|\Phi_{kn+r}(x) - \Phi_{kn}\left(\sqrt{\frac{kn}{kn+r}}\, x\right)\right| : r = 0, \ldots, k-1\right\} = 0.$$

5. *a.* Prouver que :

$$\limsup_m \left|\Phi_m(x) - \exp\left(-\frac{1}{2}\overline{Q}_k(x)\right)\right| \leq \rho_k\|x\|^2.$$

b. Conclure que $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} Z_n\right)_{n \geq 1}$ converge en loi et identifier sa limite.

6. On ne suppose plus $\mathrm{E}[Y_1] = 0$.

Étudier la convergence en loi de $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} Z_n\right)_{n \geq 1}$, puis celle de $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} L_n x\right)_{n \geq 1}$, $x \in \mathbb{R}^2$.

E

On suppose γ adaptée et Y_1 de carré intégrable. N désigne une variable gaussienne centrée de $\mathbb{R}^2$ de matrice de covariance $\sigma^2 e$.

Pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on pose :

$$B(x, r) = \{y : y \in \mathbb{R}^2, \|x - y\| < r\}, \quad B_r = B(0, r),$$
$$B'(x, r) = \mathrm{SO}(2) \times B(x, r), \quad B'_r = \mathrm{SO}(2) \times B_r.$$

1. Montrer que, pour tout ε, $\varepsilon > 0$, $\lim_n \frac{1}{n\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(\left[\sqrt{\frac{k}{n}}\, N \in B_\varepsilon\right]\right)$

existe et que, cette limite étant notée $\alpha(\varepsilon)$, on a $\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(\varepsilon) = +\infty$.

A SUIVRE

2. Soit $CK(\mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions numériques continues à supports compacts sur $\mathbb{R}^2$ muni de la norme de la convergence uniforme notée $\|\cdot\|_\infty$. Pour $g \in CK(\mathbb{R}^2)$ et $t > 0$, on pose $g_t(x) = g(\sqrt{t}\,x)$.

a. Montrer que, pour c, $0 < c < 1$, $K = \{g_t : t \in [c, 1]\}$ est un compact de $CK(\mathbb{R}^2)$.

b. Prouver que, pour c, $0 < c < 1$,

$$\lim_n \sup \left\{ \left| E\left[g_t\left(\frac{1}{\sqrt{n}} Z_n\right)\right] - E[g_t(N)] \right| : t \in [c, 1] \right\} = 0,$$

puis que, si l'on pose :

$$d_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| E\left[g_{\frac{k}{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} Z_k\right)\right] - E[g_{\frac{k}{n}}(N)] \right|,$$

$\lim_n d_n = 0$.

3. Montrer que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_n \frac{1}{n\varepsilon^2} E\left[\sum_{k=1}^{n} 1_{B_\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} Z_k\right)\right] = +\infty.$$

4. On pose, pour $g \in G$, A borélien de G et B borélien de $\mathbb{R}^2$,

$$V(g, A) = E\left[\sum_{n \geq 0} 1_A(gR_n)\right] \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \quad H(B) = V((e, 0), SO(2) \times B).$$

a. Si $T = \inf\{n : n \geq 0, gR_n \in A\}$, montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$E\left[1_{[T=k]} \sum_{n \geq 0} 1_A(gR_n)\right] = E[1_{[T=k]} V(gR_k, A)],$$

en déduire que, pour tout $g \in G$,

$$V(g, A) \leq \sup\{V(h, A) : h \in A\}.$$

b. Prouver que, pour tout r, $r > 0$, et $x \in \mathbb{R}^2$,

$$H(B(x, r)) \leq H(B_{2r})$$

puisqu'il existe une constante C telle que, pour tout r et $a, r > 0$, $a > 1$,

$$H(B_{ar}) \leq Ca^2 H(B_{2r}).$$

c. Utiliser 3. pour conclure que, pour tout r, $r > 0$,

$$E\left[\sum_{n \geq 0} 1_{B_r}(L_n 0)\right] = +\infty.$$

FIN

concours externe de recrutement de professeurs agrégés

SESSION DE 1991

composition de mathématiques appliquées

Durée : 6 heures

MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

Notations : dans tout le problème on désigne par A un alphabet fini, par A^+ l'ensemble des mots finis non vides faits de lettres de A, et notés u, v, w, ... Le mot vide est noté ε, et on désigne par $A^* = \{\varepsilon\} \cup A^+$ le monoïde libre sur A. L'ensemble des mots infinis, c'est-à-dire des suites infinies de lettres de A (notés α, β, γ, ...) sera désigné par A^ω. Plus généralement, étant donné un langage L, on désigne par L^+ l'ensemble des mots obtenus en concaténant des suites finies non vides de mots de L, par L^* le langage $\{\varepsilon\} \cup L^+$, enfin par L^ω l'ensemble des mots infinis obtenus en concaténant une infinité de mots non vides de L :

$$L^\omega = \{\alpha \in A^\omega ;\ \alpha = u_0 \ldots u_n \ldots \wedge (\forall n)\ u_n \in L - \{\varepsilon\}\}.$$

On appelle langage infinitaire toute partie de A^ω, par opposition aux langages (finitaires) qui sont inclus dans A^*. Un mot fini v est un facteur d'un mot α si $\alpha = uv\beta$. Un mot v est préfixe d'un mot α si $\alpha = v\beta$. Enfin si $\alpha = a_0 \ldots a_n \ldots$, où $a_n \in A$ pour tout n, on écrit $\alpha[m,n[$ le facteur $a_m \ldots a_{n-1}$ pour $m \leqslant n$, avec $\alpha[m,m[= \varepsilon$.

Un automate (indéterministe) est un ensemble fini Q d'états doté d'un ensemble δ de transitions inclus dans $Q \times A \times Q$. Au lieu de $(q,a,q') \in \delta$ on note plutôt $q \xrightarrow{a} q'$; ceci fait apparaître les automates comme des graphes finis dont les sommets sont les états et dont les arcs sont étiquetés par des lettres. Un automate est dit déterministe quand il vérifie $q \xrightarrow{a} q' \wedge q \xrightarrow{a} q'' \Rightarrow q' = q''$. On distingue un état initial noté q_0 et un ensemble d'états finals noté F.

PREMIERE PARTIE

1°) Rappelez trois définitions équivalentes des langages rationnels sur A, au moyen des automates, des monoïdes finis et des expressions rationnelles (on ne demande pas de preuve de leur équivalence).

Prouvez que le complémentaire d'un langage rationnel est encore rationnel.

2°) On donne une relation d'équivalence sur A^*, notée $x \equiv y$.

a) Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $(u \equiv u' \wedge v \equiv v' \Rightarrow uv \equiv u'v')$ pour tous mots u,u',v,v' de A^*.

(*ii*) $(u \equiv v \Rightarrow xuy \equiv xvy)$ pour tous mots u,v,x,y de A^*.

Une relation qui vérifie ces conditions s'appelle une congruence.

b) Prouvez qu'un langage est rationnel s'il est réunion de classes d'équivalence pour une congruence d'indice fini (c'est-à-dire ayant un nombre fini de classes).

On appelle langage infinitaire rationnel l'ensemble des mots infinis reconnus par un automate au sens suivant (dit «de Büchi») : un mot $\alpha = a_0 a_1 \ldots a_n \ldots$ est reconnu s'il existe un chemin infini étiqueté par α : $q_0 \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} \ldots\ q_n \xrightarrow{a_n} q_{n+1} \ldots$ partant de l'état initial et passant une infinité de fois par des états finals : $\{n\ ;\ q_n \in F\}$ est infini.

A SUIVRE

3°) Donnez un automate reconnaissant l'ensemble des mots infinis sur $A=\{a,b\}$ qui contiennent une infinité de a. Donnez un automate reconnaissant l'ensemble des mots infinis sur A qui contiennent un nombre fini de a.

4°) *a)* Etant donné un langage $L \subseteq A^*$, on désigne par lim(L) l'ensemble des mots infinis ayant une infinité de préfixes dans L:

$$\alpha \in \lim(L) \Leftrightarrow \{n>0 ;\ \alpha[0,n[\in L\} \text{ est infini.}$$

Montrez que si L est un langage rationnel de A^*, le langage lim(L) est infinitaire rationnel.

b) Donnez un exemple de langage infinitaire rationnel qui n'est pas de la forme lim(L) où L est un langage rationnel de A^*.

c) Donnez une condition pour qu'un langage infinitaire rationnel soit de la forme lim(L) où L est un langage rationnel de A^*.

5°) *a)* Montrez que si L est un langage de A^* on a $L^\omega \subseteq \lim(L^+)$ et que l'inclusion peut être stricte, même si L est rationnel (considérer $L=ab^*$).

b) Montrez que si L vérifie $L \cap (LA^+)=\emptyset$, alors il vérifie $L^\omega=\lim(L^+)$.

SECONDE PARTIE

6°) *a)* Montrez que si L est un langage rationnel de A^*, alors L^ω est un langage infinitaire rationnel.

b) Montrez que si L est un langage rationnel de A^* et M un langage infinitaire rationnel alors LM est un langage infinitaire rationnel.

c) Montrez que si L et M sont deux langages infinitaires rationnels, il en va de même de leur réunion $L \cup M$.

Déduisez-en que tout langage infinitaire de la forme $\bigcup_{1 \leq i \leq n} L_i M_i^\omega$ est rationnel dès que les L_i et les M_i sont rationnels dans A^*.

Pour les questions suivantes, on se donne un automate fini $\mathcal{Q}$. On écrit $q \xrightarrow{u} q'$ s'il existe un chemin étiqueté par les lettres de u allant de q à q' et $q \xrightarrow{u}_F q'$ s'il existe un chemin étiqueté par les lettres de u allant de q à q' et passant par un état de F (cet état peut être q ou q'). Enfin on pose $q^{-1}q' = \{u \in A^* ;\ q \xrightarrow{u} q'\}$.

7°) Montrez que $q^{-1}q'$ est un langage rationnel. Montrez que $\{u \in A^* ;\ q \xrightarrow{u}_F q'\}$ est un langage rationnel, et construire un automate qui le reconnaît.

8°) Montrez que tout langage infinitaire rationnel est de la forme $\bigcup_{1 \leq i \leq n} U_i V_i^\omega$ où les langages U_i et V_i sont rationnels dans A^*, vérifient $V_i V_i \subseteq V_i$ et $U_i V_i \subseteq U_i$ et qu'ils peuvent se déduire d'un automate reconnaissant le langage.

9°) On définit sur A^* la relation $u \equiv v$ comme suit:

$$\forall q \forall q' ((q \xrightarrow{u} q' \Leftrightarrow q \xrightarrow{v} q') \wedge (q \xrightarrow{u}_F q' \Leftrightarrow q \xrightarrow{v}_F q'))$$

a) Montrez que $u \equiv v$ est une congruence d'indice fini (voir question 2).

b) Construire un automate fini reconnaissant la classe d'équivalence d'un mot donné.

10°) Soient L le langage infinitaire reconnu par l'automate $\mathcal{Q}$ et U et V deux classes de congruence pour la relation $x \equiv y$. Montrez la relation $UV^\omega \cap L \neq \emptyset \Rightarrow UV^\omega \subseteq L$. Quelles relations les langages de la forme UV^ω ont-ils entre eux?

Qu'en déduisez-vous pour le complémentaire de L?

Tournez la page S.V.P.

11°) On se donne un mot infini arbitraire α et on définit la relation $m \sim n$ sur les entiers naturels par: $m \sim n = \exists k\ (k>m \wedge k>n \wedge \alpha[m,k[\equiv \alpha[n,k[)$.

a) Montrez que cette relation est une équivalence dont le nombre de classes est fini.

b) Montrez qu'il existe une suite $n_0 < \ldots < n_i < \ldots$ telle que $n_i \sim n_j$ pour tout i et tout j, et vérifiant $\alpha[n_0,n_{i+1}[\equiv \alpha[n_i,n_{i+1}[$.

c) Montrez que, quitte à se restreindre à une sous-suite, on peut exiger de plus $\alpha[n_0,n_i[\equiv \alpha[n_0,n_{i+1}[$. Déduisez-en qu'il exi.e deux classes U et V de congruence pour $\equiv$ telles que $\alpha \in UV^\omega$, avec de plus $VV \subseteq V$.

d) Montrez que le complémentaire dans A^ω d'un langage infinitaire rationnel L est infinitaire rationnel, et déduisez un automate le reconnaissant d'un automate reconnaissant L.

12°) Montrez que tout langage infinitaire de la forme $\bigcup_{1 \leq i \leq n} U_i \lim(W_i)$, où les U_i et les W_i sont des rationnels de A^*, est rationnel.

13°) *a)* Montrez que pour toute partie V de A^*, tout mot de V a exactement un préfixe dans $V - VA^+$.

b) Déduisez-en que si V vérifie $VV \subseteq V$, alors on a $V^\omega \subseteq \lim(V(V-VA^+))$.

14°) *a)* Réciproquement, considérons deux suites de mots $v_n \in V$ et $v'_n \in (V-VA^+)$, telles que $v_n v'_n$ est un préfixe de $v_{n+1}v'_{n+1}$ pour tout n et que l'ensemble $\{v_n v'_n\ ;\ n \geq 0\}$ est infini. Montrez qu'on peut en extraire une sous-suite telle que $v_p v'_p$ soit un préfixe de v_{p+1}.

b) Montrez que si une classe de congruence V vérifie $VV \subseteq V$, alors pour tous mots u, v, w de A^* on a $(u \in V \wedge v \in V \wedge uvw \in V) \Rightarrow vw \in V$.

c) Concluez-en que tout langage rationnel infinitaire est une réunion finie de langages infinitaires de la forme $U \lim(W)$ où U et W sont des langages rationnels de A^* (on pourra utiliser le résultat de la question 13).

TROISIEME PARTIE

On considère le langage logique suivant: on se donne un ensemble infini V de variables, notées par des minuscules, la constante 0 et la fonction s (comme successeur); et on définit l'ensemble T des termes par:

(i) $V \subseteq T$

(ii) $0 \in T$, et $s(t) \in T$ pour tout $t \in T$.

On se donne aussi un ensemble infini P de variables ensembles d'entiers, notées par des majuscules, et deux symboles de prédicat binaires: l'égalité et l'appartenance; et on définit l'ensemble SIS des formules comme le plus petit ensemble contenant:

(iii) $t = t'$ pour tout terme t et tout terme t' de T,

(iv) $t \in X$ pour toute variable X de P et tout terme t de T,

(v) $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $\varphi \Leftrightarrow \psi$, $\forall x \varphi$, $\exists x \varphi$, $\forall X \varphi$, $\exists X \varphi$ où φ et ψ sont des formules de SIS, où x est une variable de V et X une variable de P.

Exemple: $\forall X((0 \in X \wedge \forall x(x \in X \Rightarrow s(x) \in X)) \Rightarrow \forall x(x \in X))$ est une formule de SIS.

15°) *a)* Montrez qu'on peut définir la formule $0 \in X$ par une autre formule de SIS ne contenant pas 0.

b) Montrez qu'on peut définir le prédicat $x < y$ par une formule de SIS contenant s comme unique symbole de fonction (on remarquera que y doit appartenir à tout ensemble stable par passage au successeur et contenant x).

A SUIVRE

c) Exhiber une formule contenant X comme unique variable libre, vraie si et seulement si l'ensemble d'entiers X est fini.

16°) *a*) Considérant qu'une formule de S1S contenant une unique variable libre x est vraie ou fausse selon la valeur de l'entier x, montrez qu'on peut interpréter cette formule par un mot infini sur l'alphabet $\{0,1\}$ des booléens. Montrez qu'on peut interpréter toute formule de S1S contenant une unique variable X ensemble d'entiers par un langage infinitaire sur l'alphabet $\{0,1\}$.

b) Montrez comment toute formule de S1S contenant n variables libres $X_1, \ldots, X_n$ où les X_i sont des ensembles d'entiers peut être interprétée par un langage infinitaire sur l'alphabet $A=\{0,1\}^n$. Quel est le langage interprétant la formule $\forall x(x\in X_1 \Rightarrow x\in X_2)$? la formule $X_1=X_2$?

c) Donnez une formule $P_{a,x}$ de S1S contenant n variables libres, dont l'interprétation est le langage de tous les mots infinis sur $\{0,1\}^n$ dont la x-ième position est un élément donné a de $\{0,1\}^n$? Trouver deux formules de S1S caractérisant respectivement les deux langages infinitaires de la question 3.

17°) Etant donné un automate fini ayant p états, d'état initial q_0 et d'ensemble F d'états finals et reconnaissant un langage infinitaire L de A^ω, où $A=\{0,1\}^n$, caractérisez L par une formule de S1S (on pourra appeler Q_i l'ensemble des rangs d'un mot infini où l'automate est dans l'état q_i et exprimer qu'il existe des ensembles $Q_0, \ldots, Q_p$ vérifiant toutes les conditions de la reconnaissance: il existe une suite de transitions étiquetées par les lettres de A, commençant en q_0, où chaque arc $q_x \to q_{x+1}$ est une transition, et passant une infinité de fois par un état de F). Conclusion?

18°) Etant donnée une formule de S1S, on se propose de trouver une formule équivalente ne contenant que des quantifications portant sur des ensembles, avec pour uniques prédicats de base les prédicats $X\subseteq Y$ (X est inclus dans Y), et $S(X,Y)$ ($X=\{x\}$ et $Y=\{y\}$ sont des singletons et $y=s(x)$).

a) Montrez que ces deux prédicats sont définissables en S1S.

b) Montrez que toute formule de S1S est équivalente à une formule dont les prédicats élémentaires sont $y=x$, $y=s(x)$, et $x\in X$, où x et y sont des variables de V et X une variable de P (on pourra utiliser les résultats de la question 15°).

c) Montrez qu'on peut remplacer les variables entières par des variables ensembles d'entiers, et exprimer les prédicats du *b*) au moyen de $X\subseteq Y$ et $S(X,Y)$.

19°) *a*) Exhibez un automate fini qui reconnaît au sens de Büchi les mots vérifiant la formule $X_1\subseteq X_2$, et un automate qui reconnaît les mots vérifiant $S(X_1,X_2)$.

b) Montrez que si un automate reconnaît les mots sur $\{0,1\}^2$ vérifiant une formule $\varphi(X_1,X_2)$, ce même automate reconnaît les mots vérifiant la formule $\exists X_2\varphi(X_1,X_2)$ si on remplace les étiquettes des transitions par leurs projections sur la première coordonnée.

c) Montrez que pour toute formule de S1S contenant n variables libres on peut construire un automate fini qui reconnaît (au sens de Büchi) les mots sur $\{0,1\}^n$ vérifiant la formule.

d) Que peut-on en déduire concernant la validité des formules de S1S, et en particulier des formules sans variable libre?

FIN